UniHei_Logo.jpg

Gehalten von : Peter Albers

Analysis III.

Skript : Paul Gondolf

Bearbeitet: 15.04.2019

Contents

0 Vorspann

Volumenabbildung vol: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0,\infty]$ mit

a) $\text{vol}(\emptyset) = 0$, $\text{vol}([0,1])^3{=}1$

b) $X_1, ..., X_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ seien paarweise disjunkt $\Rightarrow$ $\text{vol}(X_1 \cup ... \cup X_k){=}\text{vol}(X_1){+}...{+}\text{vol}(X_k)$

c) "Invarianz unter Bewegung" $\forall v \in \mathbb{R}^3\ \forall A \in O(3)\ \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^n : \text{vol}(A \cdot X + v) = \text{vol}(X) := \{\ Ax \ \mid\ x \in X\ \}$

Theorem: (Banach-Tarski 1924)

Es existieren p.w. disjunkte Mengen $X_1, ..., X_n \in \mathbb{R}^n$ und Bewegungen $\beta_1, ...\beta_n$ mit

a) $X_1 \cup ... \cup X_k = [0,1]^3$

b) $Y_1 := \beta_1(X_1), ..., Y_k := \beta_k(X_k)$ sind ebenfalls p.w. disjunkt und es gilt: $Y_1 \cup ... \cup Y_k = [0,1]^3 \cup [2,3]^3$

Korollar: vol() wie oben existiert nicht.

Banach-Tarski: (starke Version)

Es seien X,Y$\subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, beschraenkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann existieren p.w. disjunkte Mengen $X_1, ...X_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen $\beta_1, ...\beta_n$ mit:

a) $X = X_1 \cup ... \cup X_k$

b) $Y_1 := \beta_1(X_1), ..., Y_k := \beta_k(Y_k)$ sind p.w. disjunkt.

c) $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_k$

1 Mass-Theorie

Notationen Es sei X eine Menge und $A, B \subset X$

- $A^C := X \backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\} \Rightarrow\ A \backslash B = A \cup B^C$
- $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ symetrische Differenz
- Es sei A_n eine Folge in $\mathcal{P}(X)$
$\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right)^C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n^C$
$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$
$\liminf\limits_{n\to\infty} := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$
- (A_n) sei monoton steigend, d.h. $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$
$\Rightarrow\ \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$
Wir schreiben dann $A_n \uparrow A$, falls $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$
- (A_n) sei monoton fallend, d.h. $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$
$\Rightarrow\ \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$
Wir schreiben dann $A_n \downarrow A$, falls $A = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$

1.1 Ringe, Algebren, σ-Algebren

Definition 1.1: (Ringe, Algebren)

1. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ heisst Ring, falls gilt:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{A}$
   (b) $A, B \in \mathcal{A}\ \Rightarrow\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{A}$
   (c) $A, B \in \mathcal{A}\ \Rightarrow\ A \backslash B \in \mathcal{A}$
2. Ein Ring $\mathcal{A}$ ist eine Algebra, wenn zusaetzlich $X \in \mathcal{A}$ gilt.

Bemerkung:

1. Es sei $\mathcal{A}$ ein Ring. Dann gilt:

   $\mathcal{A}$ ist eine Algebra $\Leftrightarrow\ \forall A \in \mathcal{A}:\ A^C \in \mathcal{A}$.

2. Es sei J eine Indexmenge und fuer alle $j \in J$ $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra

   $\Rightarrow\ \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j = \{A \subset X \mid \forall j \in J : A \in \mathcal{A}_j\}$ ist eine Algebra. (Der Schnitt ueber beliebige Algebren ist wieder eine Algebra)

3. Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig.

   $\Rightarrow\ \alpha(\mathcal{K}) := \bigcap \{\ \mathcal{A}\ \mid \mathcal{A}$ ist eine Algebra mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}\ \}$ ist die von $\mathcal{K}$ erzeugte Algebra.

Definition 1.2: (σ-Algebra)

Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heisst σ-Algebra, wenn gilt:

1. $\mathcal{E}$ ist eine Algebra.

2. Fuer alle Folgen (A_n) in $\mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$

<u>Bemerkung:</u>

1. $\mathcal{E}$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$

   (a) $\emptyset \in \mathcal{E}$

   (b) $A \in \mathcal{E}\ \Rightarrow\ A^C \in \mathcal{E}$

   (c) $A_n \in \mathcal{E}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$

2. $A_n \in \mathcal{E}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow\ \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\ ,\ \limsup_{n\to\infty} A_n\ ,\ \liminf_{n\to\infty} A_n\ \in \mathcal{E}$

3. Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig

   $\Rightarrow\ \sigma(\mathcal{K}) := \bigcap \{\ \mathcal{E}\ \mid \mathcal{E}$ ist eine σ-Algebra mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}\ \}$

Definition 1.3: (Borel σ-Algebra)

Es sei (E,d) ein metrische Raum und $\mathcal{T}_d := \{\ U \subset E\ \mid U$ ist offen bzgl. d $\}$ die Topologie auf E. Dann heisst $\sigma(\mathcal{T}_d)$

die Borel-σ-Algebra von E. Wir bezeichen sie mit:

$$\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E,d) := \sigma(\mathcal{T}_d)$$

1.2 Additve und σ-additive Funktionen

Definiton 1.4: (additiv, σ-additiv, σ-subadditiv)

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$

1. μ heisst additiv, falls gilt $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. μ heisst σ-additiv, falls fuer alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$, die p.w. disjunkt sind, gilt:
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$
3. μ heisst σ-subadditiv, falls fuer alle $B \in \mathcal{A}$ und eine Folge (A_n) in $\mathcal{A}$ gilt:
$$B \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \ \Rightarrow\ \mu(B) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bemerkung:

1. μ sei additiv. Dann folgt:
   (a) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ p.w. disjunkt
   $\Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$
   (b) $A, B \subset \mathcal{A},\ B \subset A \ \Rightarrow\ \mu(B) \leq \mu(A)$
2. μ sei σ-additiv. Dann ist μ auch additiv

Lemma 1.5:

1. $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ sei σ-additiv. Dann ist μ σ-subadditiv.
2. μ sei additiv und σ-subadditiv. Dann ist μ σ-additiv.

Satz 1.6:

Es sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additiv. Dann ist aequivalent:

1. μ ist σ-additiv.

2. Es sei $(A_n) \subset \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$A_n \uparrow A \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$$

Satz 1.7:

Es sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Dann gilt fuer alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A_0) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$$

Korollar 1.8:

Es sei μ σ-additiv auf der σ-Algebra $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ und $(A_n) \subset \mathcal{E}$. Dann gilt:

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)$$

Lemma 1.9:

Es sei μ σ-additiv auf der σ-Algebra $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ und $(A_n) \subset \mathcal{E}$. Dann folgt aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$:

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

1.3 Messbare Raume und Massraeume

Definition 1.10 (Messbarer Raum, Mass, Massraum)

1. Es sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Dann heisst $(X, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum.

2. Es sei $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ σ-addititv. Dann heisst μ ein Mass auf $(X, \mathcal{E})$ und $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum.

3. Ein Mass heisst endlich, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Ein Mass heisst σ-endlich, eine Folge $(A_n) \subset \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ existiert.
5. Ist $\mu(X) = 1$, so wird μ Wahrscheinlichkeitsmass genannt.

Definition 1.11: (μ-Nullmengen, μ-fast-ueberall)

Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum.

1. Dann heisst eine Menge $B \in \mathcal{E}$ μ-Nullmenge, falls $\mu(B) = 0$.
2. Eine Eigenschaft $P(x)$, $x \in X$, ist μ-fast ueberall wahr, falls:

$$\{x \in X \mid P(x) \; ist \; falsch\}$$

   in einer μ-Nullmenge enthalten ist.

Lemma/Definition 1.12: (Vervollstaendigung)

Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum. Dann ist $\mathcal{E}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B, C \in \mathcal{E} \text{ mit } \mu(C) = 0 \text{ und } A \triangle B \subset C\}$ eine σ-Algebra mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_\mu$
2. Zu $A \in \mathcal{E}_\mu$ waehle wie oben $B, C \in \mathcal{E}$ und setze $\overline{\mu}(A) := \mu(B)$

Dann ist $\overline{\mu} : \mathcal{E}_\mu \to [0, \infty]$ ein Mass. Der Massraum $(X, \mathcal{E}_\mu, \overline{\mu})$ heisst die Vervollstaendigung von $\mathcal{E}$ bzgl. μ

Ein Massraum heisst vollstaendig, wenn gilt:

$$\forall A \in \mathcal{E} \text{ mit } \mu(A) = 0 \;\; : \;\; B \subset A \;\; \Rightarrow \;\; B \in \mathcal{E}$$

1.4 Der Fortsetzungssatz

Theorem 1.13: (Caratheodory)

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Dann kann μ auf $\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden.

Ist μ σ-endlich auf $\mathcal{A}$, d.h. $\exists A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow X$ und $\mu(A_n) < \infty$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Fortsetzung eindeutig.

Definition 1.14: (π-System/ Dynkin System)

1. Ein nicht-leeres $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ heisst π-System, falls gilt: $A, B \in \mathcal{K} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{K}$

2. Ein nicht-leeres $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(X)$ heisst Dynkin-System, falls gilt:

   (a) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$

   (b) $A \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; A^C \in \mathcal{D}$

   (c) $(A_n) \subset \mathcal{D}$ p.w. disj. $\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

Bemerkung:

1. σ-Algebra $\Rightarrow$ Dynkin und π-System.

2. $\mathcal{C}$ π- und Dynkin-System $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ σ-Algebra.

3. Jeder Ring ist ein π-System.

Theorem 1.15: (Dynkin)

Es sei $\mathcal{K}$ ein π-System und $\mathcal{D}$ ein Dynkin System mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$. Dann gilt: $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}$.

Proposition 1.16:

Es seien μ_1, μ_2 Masse auf $(X, \mathcal{E})$. Es gelten:

1. $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{E} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ enthaelt ein π-System $\mathcal{K}$ mit $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$

2. $\exists (X_i) \subset \mathcal{K}$ mit $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$ fuer alle $i \in \mathbb{N}$ und $X_i \uparrow X$.

Dann folgt: $\mu_1 = \mu_2$

Definition 1.17: (Aeusseres Mass)

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Dann heisst:

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \;\middle|\; A_i \in \mathcal{A},\; E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right\}$$

das aeussere Mass von $E \subset \mathcal{P}(X)$, induziert von μ.

Bemerkung:

1. $\mu^* : \mathcal{P}(X)$ ist i.a. kein Mass!

2. Aus der Definition folgt direkt, dass μ^* monoton ist:

$$E \subset F \subset X \quad \Rightarrow \quad \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

3. $\mathcal{A}$ ein Ring ist nicht notwendig fuer Def. 1.17.

Proposition 1.18:

μ^* ist σ-subadditiv. Ist μ ebenfalls σ-subadditiv und $\mu(\emptyset) = 0$, so gilt: $\mu^*\big|_{\mathcal{A}} = \mu$

Definition 1.19: (additive Mengen)

Es sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein aeusseres Mass. $A \in \mathcal{P}(X)$ heisst additiv bzgl. μ^*, falls:

$$\forall E \in \mathcal{P}(X) \ : \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$$

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P}(X) \ | \ \text{A ist additiv}\}$$

Bemerkung:

Aus μ^* σ-subadditiv folg: $A \in \mathcal{G} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$

Lemma 1.20:

Es gilt:

1. $A \in \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad A^C \in \mathcal{G}$

2. $A \in \mathcal{G},\ B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Theorem 1.21:

$\mathcal{A}$ sei ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additiv. Dann ist $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ und $\mu^*\big|_{\mathcal{G}}$ ist σ-additiv.

<u>Bemerkung:</u>

Insbesondere ist $\left(X, \mathcal{G}, \mu^*\big|_{\mathcal{G}}\right)$ ein Massraum.

1.5 Das Lebesgue Mass auf $\mathbb{R}$

Setze:

$$\mathcal{J} := \{(a, b] \;\mid\; a < b\}$$

und

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\;\; I_1, ..., I_n \in \mathcal{J} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

Lemma 1.22:

1. $\mathcal{A}$ ist ein Ring.

2. Es gilt: $\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists J_1, ..., J_n \in \mathcal{J}$ p.w. disjunkt mit $A = \bigcup\limits_{i=0}^{k} J_i$

Definition/Lemma 1.23:

Wir setzen $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda\left((a, b]\right) := b - a$ und fuer $A \in \mathcal{A}$:

$\lambda(A) := \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(J_i)$, wobei $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} J_i$ eine disjunkte Zerlegung gemaess Lemma 1.22 ist.

Dann ist λ wohldefiniert, d.h. $\lambda(A)$ haengt nicht von der Wahl der disj. Zerlegung ab.

Lemma 1.24:

Es sei K ein beschraenktes und abgeschlossenes Intervall und (U_n) ein Folge offener Mengen mit $K \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$. Dann existieren $n_1, ..., n_k$ mit $K \subset U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_k}$, oder aequivalent: $\exists l \in \mathbb{N} : \ K \subset \bigcup_{n=0}^{l} U_k$

Theorem 1.25:

$\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ist σ-additiv.

Definition 1.26: (translations-invariant, lokal endlich)

Sei μ ein Mass auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Dann heisst μ translations-invariant, wenn gilt: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall h \in \mathbb{R} \ : \ \mu(B + h) = \mu(B)$

2. μ heisst lokal endlich, falls fuer alle beschraenkten Intervalle $I \subset \mathbb{R}$, gilt: $\mu(I) < \infty$

Bemerkung:

μ lokal endl. $\Rightarrow$ μ σ-endlich

Theorem 1.27 (Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$)

Es existiert ein eindeutig bestimmtes translations-invariantes und lokal endliches Mass λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\lambda([0, 1]) = 1$. λ heisst Lebesgue-Mass.

Genauer: $\forall C \geq 0 \exists!$ translativ, lok.-endl. Mass ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\nu([0, 1]) = c$. Es gilt: $\nu = c \cdot \lambda$

Bemerkung:

λ erzeugt ein aeusseres Mass $\lambda^* : \ \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ und damit $\mathcal{G} = \{$ additive Mengen bzgl. $\lambda^*\}$ ist σ-Algebra.

Caratheodory: $\lambda^*|_{\mathcal{G}} = \lambda$ ist ein Mass.

Es gilt: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$. Wir definieren $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})_\lambda$ (Vervollstaendigung)

Es gilt: $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{G}$ und heisst Lebesgue σ-Algebra (λ ist auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ lok.-endl., translationsinvariant.)

2 Integrationstheorie

2.1 Messbare Funktionen und Borell-Funktionen

Sei $\varphi : X \to Y$, $I \subset \mathcal{P}(X)$

$\varphi^{-1}(I) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in I\} = \{\varphi \in I\}$

1. $\varphi^{-1}(I^C) = \left(\varphi^{-1}(I)\right)^C$

2. Fuer $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(Y)$ gilt:

   (a) $\bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$

   (b) (A_i) p.w. disjunkt $\Rightarrow$ $\left(\varphi^{-1}(A_i)\right)$ p.w. disjunkt

   (c) $\bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$

3. $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-Algebra

   $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) = \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{P}(Y)$ ist eine σ-Algebra

Definition 2.1: (Messbare Abbildungen)

1. Es seien (X,$\mathcal{E}$) und (Y,$\mathcal{F}$) Messraeume. Dann heisst $\varphi : X \to Y$ <u>$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messbar</u>, falls $\varphi^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$

2. Ist $(Y, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heisst φ <u>reelwertig $\mathcal{E}$-messbar</u>

3. Zusaetzlich (X,d) metrisch, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so heisst φ <u>reelwertige Borel-Funktion</u>

Lemma 2.2: (Messbarkeitskriterien)

Es $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{R} := \sigma(\mathcal{K})$. Dann sind fuer $\varphi : X \to Y$ folgende Aussagen aequivalent:

1. φ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messbar.

2. $\forall K \in \mathcal{K} : \varphi^{-1}(K) \in \mathcal{E}$

3. $\varphi^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E}$

Bemerkung:

1. μ messbar $\Leftrightarrow$ Urbilder messbarer Mengen sind messbar
2. Es reicht Messbarkeit auf einem Erzeugendensystem zu ueberpruefen.
3. Stetige Funktionen $\varphi : (X, d) \to (Y, d')$ sind Borel-Funktionen, d.h. messbar bzgl. $\mathcal{B}(X, d)$, $\mathcal{B}(Y, d')$

Lemma 2.3: (Komposition messbarer Funktionen ist messbar)

Sind (X,$\mathcal{E}$), $(Y, \mathcal{F})$, $(Z, \mathcal{G})$ Messraeume,

$\varphi : X \to Y \quad (\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messbar,

$\psi : Y \to Z \quad (\mathcal{F}, \mathcal{G})$-messbar,

dann ist $\psi \circ \varphi : X \to Z \quad (\mathcal{E}, \mathcal{G})$-messbar.

1. Es ist aequivalent:
   (a) $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{E}$-messbar
   (b) $\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}((-\infty, t]) \subset \mathcal{E}$
   (c) $\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}((-\infty, t)) \subset \mathcal{E}$
   (d) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}([a, b]) \subset \mathcal{E}$
   (e) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}([a, b)) \subset \mathcal{E}$
   (f) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}((a, b]) \subset \mathcal{E}$
   (g) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi^{-1}((a, b)) \subset \mathcal{E}$
2. Sind $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R} \quad \mathcal{E}$-messbar, so auch $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi$

Definition 2.4: (erweiterte Funktionen)

1. Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, die erweiterte reelle Gerade,

   und nennen Fuktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ erweiterte (oder numerische) Funktion.
2. $\varphi : (X, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{E}$-messbar, wenn gilt:
   (a) $\varphi^{-1}(\{+\infty\})$, $\varphi^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}$

(b) $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}):\ \varphi^{-1}(I) \in \mathcal{E}$.

Bemerkung:

$d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow (\overline{\mathbb{R}}, d)$ ein kompakter metrischer Raum.

Es gilt:

1. $A \subset \mathbb{R}$ offen bzgl. $d_{Eukl.}$

   $\Rightarrow \quad A$ ist d-offen.

2. $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} \quad \mathcal{E}$-messbar $\Leftrightarrow \quad \varphi$ ist $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}, d))$-messbar.

Proposition 2.5:

Es sei (φ_n) eine Folge erweiterter $\mathcal{E}$-messbar Fkt.. Dann sind $\sup\limits_n \varphi_n,\ \inf\limits_n \varphi_n,\ \limsup\limits_{n\to\infty} \varphi_n,\ \liminf\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ erweiterte $\mathcal{E}$-messbare Funktionen.

Bemerkung:

$(\varphi_n)\quad \mathcal{E}$-messbar $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\varphi_n(x) \uparrow \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi\ \ \mathcal{E}$-messbar, denn $\varphi(x) = \sup\limits_n \varphi_n(x)$

2.2 Partition und einfache Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{E})$ messbarer Raum.

Defintion 2.6: (einfache Fkt., Partitionen)

1. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heisst einfach falls $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ endlich ist.

2. Eine endliche, disjunkte Vereinigung $X = A_1 \cup ... \cup A_n$, $[i \neq j \quad \Rightarrow \quad A_i \cap A_j = \emptyset]$ heisst eine endliche Partition von X.

   Gilt: $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$, so heisst $(A_k)_{k+1,...,n}$ eine endliche, $\mathcal{E}$-messbare Partition von X.

Bemerkung:

1. Menge der einfachen Funktionen bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Schreibe $\varphi(X) := \{a_1, ..., a_n\}$, $(a_i)_{i=1,...,n}$ p.w. verschieden und $A_i := \varphi^{-1}(a_i) \subset X$.

   $\Rightarrow (A_i)_{i=1,...,n}$ eine endliche Partition von X und $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. Dies ist die <u>kanonische</u> Darstellung von φ.

3. φ hat viele Darstellunge der Form $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} \overline{a}_k \mathbb{1}_{\overline{A}_k}$, $\overline{a}_k \in \mathbb{R}$, $\overline{A}_k \subset X$. Wir erlauben $\overline{a}_k \notin \varphi(X)$ und $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j \neq \emptyset$

4. $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ kanonisch

   Dann gilt: φ $\mathcal{E}$-messbar

   $\Leftrightarrow$ $A_k \in \mathcal{E}$ $\forall k = 1, ..., n$

   $\Leftrightarrow$ (A_k) endl., messbare Partition.

Proposition 2.7:

Es sei $f : X \to [0, \infty]$ eine nicht negative, $\mathcal{E}$-messbare Funktion. Fuer $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definiere:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, \text{ falls } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}, & i = 1, ..., n \cdot 2^n \\ n, \text{ falls } f(x) \geq n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ_n sind einfach und $\mathcal{E}$-messbar. Die Folge (φ_n) ist monoton wachsend mit $\varphi_n \uparrow f$. Ist f beschraenkt, so ist die Konvergenz gleichmaessig.

2.3 Das Integral nicht-negativer messbarer Funktionen

Einfache Funktionen

Es sei $\varphi : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \mathbb{R}$, eine nicht-negative, einfach $\mathcal{E}-$messbare Funktion. Wir schreiben: $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $a_1, ..., a_N \geq 0$, $A_1, ..., A_N \in \mathcal{E}$

Defintion 2.8 (Integral nicht-neg. messbarer, einfacher Funktionen)

$$\int\limits_X \varphi \, d\mu := \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k) \quad \in [0, +\infty]$$

mit der ueblichen definition $0 \cdot \infty := 0$

<u>Bemerkung:</u>

1. Statt $\int\limits_X \varphi \, d\mu$ schreiben wir auch $\int \varphi \, d\mu$ bzw. $\int_X \varphi(X) d\mu(x)$.

2. $\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\lambda = 1 \cdot \mu(\mathbb{R}) = \infty$

Lemma 2.9:

Das Integral ist wohldefiniert. D.h.

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{j=1}^{M} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

impliziert:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(B_j)$$

Proposition 2.10

Es seien φ und ψ einfache, nicht-negative $\mathcal{E}$-messbare Funktionen. Dann ist fuer alle $\alpha, \beta \geq 0$ auch $\alpha \, \varphi + \beta \, \psi$ eine einfache, nicht-negative $\mathcal{E}$-messbare Funktion. Es gilt:

$$\int\limits_X (\alpha \, \varphi + \beta \, \psi) \, d\mu = \alpha \int\limits_X \varphi \, d\mu + \beta \int\limits_X \psi \, d\mu$$

Ausserdem gilt: $\varphi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X \varphi \, d\mu \leq \int\limits_X \psi \, d\mu$

Definition 2.11: (Integrale nicht-neg. messbarer Funktionen)

Es sei $f : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$ eine nicht-negative $\mathcal{E}$-messbare Funktion. Wir definieren:

$$\int\limits_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int\limits_X \varphi \, d\mu \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \text{ nicht-negativ, einfach } \mathcal{E}\text{-messbare} \\ \text{Funktion mit } \varphi \leq \text{ f} \end{array} \right\}$$

das <u>Integral von f ueber X bzgl. μ</u>.

<u>Bemerkung:</u>

1. Prop. 2.7: $\exists (\varphi_n)$ Folge nicht-neg., einfacher $\mathcal{E}$-messbarer Funktionen mit $\varphi_n \uparrow f$.

2. $\int\limits_X f \, d\mu = +\infty$ ist moeglich und kommt vor.

Proposition 2.12:

(φ_n) sei eine Folge nicht-neg., einfacher, $\mathcal{E}$-messbare Funktion:

$$\varphi_n \uparrow f \quad \Rightarrow \quad \int_X \varphi_n \, d\mu \ \uparrow \ \int_X f \, d\mu$$

Bemerkung:

D.h.: $\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \ \middle| \ \varphi \leq f \right\}$ und $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu$ fuer alle $\varphi_n \uparrow f$

Lemma 2.13:

1. $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar und $c \geq 0$. Dann gilt:

$$\int_X (c \cdot f + g) \, d\mu = c \cdot \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

   und

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

2. $f_n, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar mit $f_n \uparrow g$

$$\Rightarrow \quad \int_X f_n \, d\mu \uparrow \int_X g \, d\mu \quad \text{(Monotone Konvergenz)}$$

Lemma 2.14: (Markov-Ungleichung)

Es sei $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar. Dann gilt fuer $a \in (0, \infty)$

$$\mu\left(\{\varphi \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_X \varphi \, d\mu$$

Korollar 2.15:

Es sei $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar:

1. $\int_X \varphi \, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\{\varphi = \infty\}\right) = 0$

2. $\int_X \varphi \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \mu$-fast ueberall $\Leftrightarrow \ \mu(\{x \mid \varphi(x) > 0\}) = \mu(\{\varphi > 0\}) = 0$

Lemma 2.16: (Fatou)

$\varphi_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar. Dann gilt:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu$$

D.h. das Integral ist unterhalb stetig (lower sum continious).

Bermerkung:

$\varphi_n \to \varphi$ punktweise:

$$\int \varphi \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu$$

2.4 Das Integral messbarer Funktionen

Definition 2.17

Es sei $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{E}$-messbare Funktion auf $(X, \mathcal{E}, \mu)$

1. Ist φ nicht-negativ, so heisst φ μ-integrierbar falls

$$\int_X \varphi \, d\mu < \infty$$

2. φ heisst μ-integrierbar, falls sowohl der Positivteil $\varphi_+ := \max\{\varphi, 0\}$ als auch der Negativteil $\varphi_- := \max\{-\varphi, 0\}$ μ-integriebar sind. Dann defienieren wir:

$$\int_X \varphi \, d\mu := \int_X \varphi_+ \, d\mu - \int_X \varphi_- \, d\mu$$

3. Es sei $A \in \mathcal{E}$ s.d. $\varphi \cdot \mathbb{1}_A$ μ-integrierbar ist. Dann definieren wir:

$$\int_A \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$$

Analog heisst $\psi : A \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integriebar, falls $\overline{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ μ-integrierbar ist. Dann setze:

$$\int_A \psi := \int_X \overline{\psi} \, d\mu$$

Bemerkung:

1. $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- \quad ; \ |\varphi| = \varphi_+ + \varphi_-$

   φ messbar $\Rightarrow \quad \varphi_+, \varphi_-$ messbar.

2. Fuer $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$-messbar ist $\int\limits_X \varphi \, d\mu$ immer definiert, aber φ ist μ-integrierbar $\Leftrightarrow \int\limits_X \varphi \, d\mu < \infty$.

Proposition 2.18:

Es sei $\varphi : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Dann gilt: φ integriebar $\Rightarrow \quad |\varphi| \quad \mu$-integriebar.

Proposition 2.19:

Es sei $\varphi, \psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar.

1. Fuer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei $\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi$ auf X definiert.

   Dann ist $\quad \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi \quad \mu$-integrierbar

$$\int (\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi) \, d\mu = \alpha \cdot \int \varphi \, d\mu + \beta \cdot \int \psi \, d\mu$$

2. $\varphi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$

3. $\left| \int\limits_X \varphi \, d\mu \right| \leq \int\limits_X |\varphi| \, d\mu$

2.5 Konvergenzsaetze

Satz 2.20: (Monotone Konvergenz)

Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum und $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge μ-integrierbare Funktionen mit :

$$\exists M \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N} : \quad \int\limits_X \varphi_n \, d\mu \ \leq \ M.$$

Dann ist $\varphi := \lim \varphi_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar mit:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X \varphi_n \, d\mu = \int\limits_X \varphi \, d\mu$$

Satz 2.21: (Dominierte/ Majorisierte Konvergenz und Lebesgue)

Es sei $\varphi_n : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $\mathcal{E}$-messbarer Funktionen, die punktweise gegen $\varphi : X \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Wir nehmen an , dass $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ μ-integriebar mit:

$$\forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad |\varphi_n(x)| \leq \psi(x) \text{ existiert}$$

Dann φ_n, φ sind μ-integriebar mit:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu$$

Es gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\varphi - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

Korollar (Riemann=Lebesgue)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f Riemann und Lebesgue Integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

2.6 Raeumlich integrierbare Funktionen

$(X, \mathcal{E}, \mu)$-Massraum

$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, \mu) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \ \mu\text{-integrierbar}\}$

Achtung: $\varphi + \psi$ ist i.A. nicht definiert auf ganz X.

$\| \cdot \|_1 : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty)$, $\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$

Es gilt:

$\|a \cdot f\|_1 = |a| \cdot \|f\|_1 \quad \forall a \in \mathbb{R} , \forall f \in \mathcal{L}^1$

$\|g + f\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1; \ \ \forall f, g \in \mathcal{L}^1$

Aber: $\|f\|_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0$ fast ueberall

Wir definieren $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \psi$ fast ueberall.

Definition 2.22: (L^1)

Der Raum der Aequivalenzklassen bezeichnen wir mit:

$$L^1(X,\mathcal{E},\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mathcal{E},\mu)/\sim$$

Lemma 2.23:

$L^1(X,\mathcal{E},\mu)$ ist ein Vektorraum und $|\cdot|_1$ induziert eine Norm auf $L^1(X,\mathcal{E},\mu)$, die wir wieder mit $\|\cdot\|_1$ bezeichnen.

Definition 2.24: $(\mathcal{L}^p, L^p)$

Fuer $p \in (0,\infty)$ definieren wir

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{E},\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f \;\; \mathcal{E}\text{-messbar}, \;\; \int\limits_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

und

$$L^p(X,\mathcal{E},\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{E},\mu)/\sim$$

Lemma 2.24:

$L^p(X,\mathcal{E},\mu)$ ist ein Vektorraum.

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist die L^p-Norm.

Proposition 2.25: (Hoelder-Ungleichung)

Es sei $\varphi \in L^p(X,\mathcal{E},\mu),\; \psi \in L^q(X,\mathcal{E},\mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \;\; p,q \in (0,\infty)$

Dann gilt:

$$\varphi \cdot \psi \in L^1(X,\mathcal{E},\mu)$$

und

$$\|\varphi \cdot \psi\|_1 \leq \|\varphi\|_p \cdot \|\psi\|_q$$

Young-Ungleichung:

$$\forall x, y \geq 0: \quad x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Proposition 2.26 (Minkowski-Ungleichung)

Es sei $p \in [1, \infty)$ und $\varphi, \psi \in L^p(X, \mathcal{E}, \mu)$.

Dann ist

$$\varphi + \psi \in L^p(X, \mathcal{E}, \mu)$$

und

$$\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$$

Bemerkung:

$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} 0$, d.h $\|\varphi_n\|_p \to 0$

Es gibt Beispiele von solchen Funktionen die nirgends punktweise konvergieren.

Theorem 2.27:

Es sei $p \in [0, \infty)$ und (φ_n) Cauchy-Folge in $L^p(X, \mathcal{E}, \mu)$. Dann gilt:

1. $\exists$ Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die μ-fast-ueberall punktweise gegen eine Funktion $\varphi \in L^p(X, \mathcal{E}, \mu)$ konvergiert.

2. $\|\varphi_n - \varphi\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d.h. $(L^p(X, \mathcal{E}, \mu), \|\cdot\|_p)$ ist vollstaendig, d.h. ein Banachraum.

Bemerkung:

1. L^p spielt wichtige Rolle in der Funktionalanalysis und PDEs

2. $(L^\infty(X, \mathcal{E}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banach-Raum.

3. $(L^2(X, \mathcal{E}, \mu), \|\cdot\|_2)$ ist ein Hilbertraum. $< f, g >_{L^2} := \int f \cdot g \; d\mu$

3 Produktmasse

3.1 Produktmass und Satz von Fubini

Es seien $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$ messbare Raeume.

Definition 3.1: (Produkt σ-Algebra)

1. Mengen $A \times B \subset X \times Y$ mit $A \in \mathcal{E}$ und $B \in \mathcal{F}$ heissen messbare Rechtecke. Es sei $\mathcal{R} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}\}$ die Menge der messbaren Rechtecke.

2. Die σ-Algebra $\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{R})$ heisst Produkt-σ-Algebra von $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$

3. Fuer $E \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ heissen fuer $x \in X$, $y \in Y$:

   $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \subset Y$ und

   $E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \subset X$

   Schnitte von E.

Bemerkung:

1. $\mathcal{R}$ ist ein π-System (d.h. Schnittstabil)

   $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$

2. $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ und $\upsilon : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ Masse

   $\rightsquigarrow \quad \mu \times \upsilon(A \times B) = \mu(A) \cdot \upsilon(B) \quad \forall A \times B \in \mathcal{R}$

3. $$\begin{aligned} i_x : \quad & Y \to X \times Y \\ & y \mapsto (x, y) \quad \Rightarrow \quad (i_x)^{-1}(E) = E_x \\ i^y : \quad & X \to X \times Y \\ & x \mapsto (x, y) \quad \Rightarrow \quad (i^y)^{-1}(E) = E^y \end{aligned}$$

Theorem 3.2:

Es seien $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ und $\upsilon : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ σ-endliche Masse. Dann gilt fuer $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$

1. $\forall x \in X: \quad E_x \in \mathcal{F}, \ \ \forall y \in Y: \quad E^y \in \mathcal{E}$

2. Die Funktion $\begin{array}{c} X \to [0,\infty] \\ \\ x \mapsto \upsilon(E_x) \end{array}$ ist $\mathcal{E}$-messbar

   und $\begin{array}{c} Y \to [0,\infty] \\ \\ y \mapsto \mu(E^y) \end{array}$ ist $\mathcal{F}$-messbar.

   Es gilt:

$$\int\limits_X \upsilon(E_x)\ d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(E^y)\ d\upsilon(y)$$

Theorem 3.3: (Produktmass)

Es seien $(X, \mathcal{E}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{F}, \upsilon)$ σ-endlich Massraeume. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Mass μ auf $X \times Y, \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft:

$$(\mu \times \upsilon)(A \times B) = \mu(A) \cdot \upsilon(B) \quad \forall A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}$$

Das Mass $\mu \times \upsilon$ ist σ-endlich. Sind μ, υ endlich so auch $\mu \times \upsilon$

Definition 3.4: (Produktmass)

1. Es seien $(X, \mathcal{E}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{F}, \upsilon)$ σ-endliche Massraeume. Dann heisst $\mu \times \upsilon$ <u>das</u> Produktmass auf $X \times Y, \mathcal{E} \times \mathcal{F}$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ Borel-σ-Algebra mit Lebesgue-Mass. Dann gilt:

$$\underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n-mal} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

   und wir nennen:

$$\lambda^n := \underbrace{\lambda \times ... \times \lambda}_{n-mal} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$$

   das n-dimensionale Lebesgue-Mass.

Korollar 3.5:

Es sei $E \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ mit $\mu \times \upsilon(E) = 0$

Dann gilt:

$$\mu(E^y) = 0 \text{ fuer } \upsilon\text{-fast-ueberall } \ y \in Y$$

und

$$\upsilon(E_x) = 0 \text{ fuer } \mu\text{-fast-uberall } \ x \in X$$

Theorem 3.6: (Fubini Tonelli)

Es seien $(X, \mathcal{E}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{F}, \upsilon)$ σ-endliche Massraeume. $F : X \times Y \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-messbar. Dann gilt:

1. Fuer jedes $x \in X$ (bzw. $y \in Y$) ist die Funktion $Y \ni y \mapsto F(x, y) \in [0, \infty]$ $\mathcal{F}$-messbar.

   (bzw. $X \ni x \mapsto F(x, y) \in [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-messbar)

2. Die Funktionen

   $$X \ni x \mapsto \int\limits_Y F(x, y)\, d\upsilon(y)$$

   und

   $$Y \ni y \mapsto \int\limits_X F(x, y)\, d\mu(x)$$

   sind $\mathcal{E}$-bzw.$\mathcal{F}$-messbare Funtkionen.

3. Es gilt:

   $$\int\limits_{X \times Y} F(x, y)\, d(\mu \times \upsilon) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y F(x, y)\, d\upsilon(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X F(x, y)\, d\mu(x) \right) d\upsilon(y)$$

Korollar 3.7: (Allgemeiner Satz von Fubini)

Es sei $F : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-messbar. F ist gerade dann $\mu \times \upsilon$-integrierbar, wenn beide folgenden Aussagen gelten:

1. Fuer μ-fast-ueberall $x \in X$ ist $y \mapsto F(x, y)$ υ-integrierbar.

2. Die Funktion $x \mapsto \int\limits_Y |F(x, y)|\, d\upsilon(y)$ ist μ-integrierbar.

Dann gilt:

$$\int\limits_{X \times Y} F(x, y)\, d(\mu \times \upsilon) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y F(x, y)\, d\upsilon(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X F(x, y)\, d\mu(x) \right) d\upsilon(y)$$

<u>Bemerkung:</u>

1. Es gilt aequivalent:

(a) Fuer υ-fast-ueberall $y \in Y$ ist $x \mapsto F(x,y)$ μ-integrierbar.

(b) Die Funktion $y \mapsto \int_X |F(x,y)| \, d\upsilon(x)$ ist υ-integrierbar.

2. Analog konstruiert man Produktmasse auf endlichen karthesischen Produkten. $(X_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)$, $i = 1, ..., n$ σ-endliche Massraeume.

   $X = X_1 \times ... \times X_n$, $\mathcal{R} := \{A_1 \times ... \times A_n \mid A_i \in \mathcal{E}_i\}$

   $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times ... \times \mathcal{E}_n = \sigma(\mathcal{R})$ $\exists! \mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit

   $\mu(A_1 \times ... \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot ... \cdot \mu_n(A_n)$.

   Dieser Prozess ist assoziativ.

3.2 Das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$

Es gilt:

$$\lambda^n\left([a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda([a_i, b_i])$$

Notation:

Fuer $a \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ definiere:

$$Q(a, \delta) := [a_1, a_1 + \delta) \times ... \times [a_n, a_n + \delta) = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, a_i + \delta)$$

δ-Box mit Ecke a.

Zu $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{Q}_N := \{Q(2^{-N} \cdot k, 2^{-N}) \mid k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}_N \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \lambda^n(Q(2^{-N} \cdot k, 2^{-N} = (2^{-N})^n = 2^{-n \cdot N}$$

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Q}_N$$

Lemma 3.8

1. $Q, Q' \in \mathcal{Q}_N \quad \Rightarrow \quad Q \cap Q' = \emptyset$ oder $Q = Q'$

2. $Q \in \mathcal{Q}_N, \;\; Q' \in \mathcal{Q}_M, \;\; N < M \;\; \Rightarrow \;\; Q \cap Q' = \emptyset$ oder $Q' \subset Q$

3. $Q, Q' \in \mathcal{Q}$. Dann gilt: $Q \cap Q' \neq \emptyset \;\; \Rightarrow Q \subset Q'$ oder $Q' \subset Q$

Bemerkung:

1. $\mathcal{Q}$ enthaelt abzaehlbar viele Boxen

2. $\forall N \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}^n\, \exists! Q \in \mathcal{Q}_N \; : \;\; x \in Q$

Lemma 3.9:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Menge. Dann ist U eine abzaehlbare, disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{Q}$

Korollar 3.10:

$$\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Theorem 3.11: (Eigenschaften des n-dim. Lebesguemass)

1. (Translationsinvariant) $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\; \forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$x + E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \lambda^n(x + E) = \lambda^n(E)$$

2. (Eindeutigkeit) Es sei μ ein translationsinvariantes Mass auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft: $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gilt $\mu(K) < \infty$. Dann existiert ein $c \geq 0$ mit $\mu = c \cdot \lambda^n$

3. (Rotationsinvariant) Fuer alle $R \in \mathcal{O}(n)$ gilt:

$$\lambda^n(R(E)) = \lambda^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

4. (lineare Transformationsformel) Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung:

$$\lambda^n(T(E)) = |\det T\,| \cdot \lambda^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

3.3 Bildmasse, Trafosatz und Trafoformel

Es sei $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$ messbare Raeume. μ sei ein Mass auf $(X, \mathcal{E})$.

Definition 3.12: (Bildmass)

Es sei $F : X \to Y$ $\mathcal{E}$-$\mathcal{F}$-messbar. Dann heisst

$$F_{\#}\mu(B) := \mu(F^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{F}$$

, das Bildmass von μ unter F.

Bemerkung:

1. $F_{\#}\mu$ ist wohldefiniert, da F messbar ist.
2. $F_{\#}\mu$ ist ein Mass, denn $F^{-1}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F^{-1}(B_n)$
3. $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z \quad \Rightarrow \quad (G \circ F)_{\#}\mu = G_{\#}(F_{\#}\mu)$

   $(G \circ F)_{\#}(C) = \mu(F^{-1}(G^{-1}(C))$

Satz 3.13: (Trafosatz)

In der obigen Situation sei $\varphi : Y \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{F}$-messbare Funktion. Dann gilt:

$$\int\limits_Y \varphi(y)\, dF_{\#}\mu(y) = \int\limits_X \varphi\left(F(x)\right)\, d\mu(x)$$

Erinnerung:

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen , dann ist $F : U \to V$ ein C^1-Diffeo, wenn F bijektiv ist und F und F^{-1} C^1-Abbildungen sind.

$$DF : U \xrightarrow{\text{stetig}} GL(\mathbb{R}^n) \text{ bzw. } Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Theorem 3.14: (Trafoformel)

Es sei $F : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $\varphi : V \to \mathbb{R}$ genau dann λ^n-integrierbar, wenn $\varphi \circ F \cdot |\det DF| : U \to \mathbb{R}$ λ^n-integrierbar ist. Dann gilt:

$$\int\limits_Y \varphi(y)\, d\lambda^n(y) = \int\limits_U \varphi(F(x)) \cdot \underbrace{|\det DF(x)|\, d\lambda^n(x)}_{dF_{\#}\lambda^n}$$

4 Integration auf Untermanigfaltigkeiten

4.1 Untermanigfaltigkeiten

Defnition 4.1:

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst k-dimensionale Untermanigfaltigkeit (UMfkt.) der Klasse C^l ($l \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$), falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und C^l-Funktionen $f_1, ..., f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $M \cap U = \{\ x \in U \mid f_1(x) = ... = f_{n-k}(x) = 0\}$
2. $\forall x \in U :$ Rang $\left(\frac{\partial(f_1,...,f_{n-k})}{\partial(x_1,...,x_n)}(x)\right) = n - k$ (= maximal)

Bemerkung:

1. Gilt statt 2. (Def 4.1) folgendes:

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial(f_1, ..., f_{n-k})}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a)\right) = n - k \text{ (= maximal)}$$

   , dann gilt auch 2. (Def 4.1) nach verkleinern von U.

2. 2. (Def 4.1) $\Rightarrow$ $(\nabla f_1(x), ..., \nabla f_{n-k}(x))$ linear unabhaengig $\forall x \in U$

Bemerkung:

Eine (n-1)-Dimensionale UMfkt in $\mathbb{R}^n$ heisst Hyperflaeche. (z.B. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$)

Proposition 4.2: (Jede UMfkt. ist lokal ein Graph.)

Sei M eine k-dimensionale UMfkt. des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^l und $a = (a_1, ..., a_n) \in M$. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten gibt es eine offene Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' = (a_1, ..., a_k)$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' = (a_{k+1}, ..., a_n)$ und $g \in C^l(U', U'')$ mit:

$$M \cap (U', U'') = Gr(g) = \{\ (x', x'') \in U' \times U'' \ \mid\ x'' = g(x')\}$$

und $g(a') = a''$.

Beispiel/Definition:

$f = (f_1, ..., f_n) : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^l} \mathbb{R}^r$ mit U offen.

$M_y := f^{-1}$, $y \in \mathbb{R}^r$. y heisst <u>regulaerer Wert</u>, falls gilt:

$$\forall x \in f^{-1}(y) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x) \text{ hat maximalen Rang}$$

(Ist $y \notin f(U) \Rightarrow y$ regulaerer Wert)

Falls y ein regulaerer Wert, dann ist M_y eine C^l-UMfkt., der Dimension $dim(M_y)$

Theorem: (Sard)

Mengen ohne regulaere Werte haben Lebesgue-Mass 0.

Proposition 4.3: (Jede UMfkt. sieht lokal wie $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ aus.)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k dimensionale Umfkt. der KLasse C^l und $a \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine C^l-Diffeo $F : U \xrightarrow{\simeq} V$ mit:

$$F(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$$

Proposition 4.4: (Jede UMfkt. besitzt Karten)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k dimensionale UMfkt. der Klasse C^l. Fuer alle $a \in M$ existiert eine (in M offene) Umgebung $W \underline{\subset M}$ von a <u>in M</u>, eine offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine Karte:

$$\phi : \Omega \to W \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. ϕ ist ein Homoeomorphismus auf W
2. ϕ ist eine C^l-Immersion, d.h. $\phi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und Rang$(J_\phi(t)) = k = \max \quad t \in \Omega$

Bemerkung:

1. $W \subset M$ offen in M, d.h. $\exists \hat{W} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $W = \hat{W} \cap M$

2. $\phi^{-1} : W \to \Omega$ stetig, heisst:

   $\forall O \in \Omega$ offen $\quad \left(\phi^{-1}\right)^{-1}(O) \subset W$ offen in W

3. $\phi^{-1} : W \to \Omega \subset \mathbb{R}^k$ heisst lokale Koordinate auf M. $p \in M \rightsquigarrow \phi^{-1}(p) \in \mathbb{R}^k$

4. $\phi^{-1} : W \to \mathbb{R}^k$, W ist keine offene Menge!

Proposition 4.2: (Koordinatewechsel sind C^l)

Es sei M eine C^l-UMfkt. der Dimension k mit $\phi_i : \Omega_i \to W_i \subset M, \; i = 1,2 \quad \Omega_i \subset \mathbb{R}^k$ offen, W_i offen in M, zwei C^l-Karten mit $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Dann ist $\phi_i^{-1}(W_1 \cap W_2) \subset \Omega_i$ offen, i=1,2. Und

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(W_1 \cap W_2) \to \phi_2^{-1}(W_1 \cap W_2)$$

ein C^l-Diffeo..

4.2 Tangentialraum und Differential

Defintion 4.6: (Tangential, Normalraum)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale UMfkt. und $p \in M$. Dann heisst:

1. $T_pM := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \gamma : (-1,1) \xrightarrow{C^1} M \\ \gamma(0) = p, \;\; \dot{\gamma}(0) = v \end{array} \right\}$ Tangentialraum von/an M in p.

2. $N_pM = (T_pM)^\perp = T_p^\perp M$ der Normalraum von M in p.

Proposition 4.7:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UMfkt., $p \in M$. Zu $p \in M$ sei $\phi : \Omega \to W \subset M$ eine Karte mit $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^k, \;\; \phi(0) = p$. Dann gilt:

$$T_pM = span\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(0), \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k}(0) \right\}$$

Ausserdem sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U \cap M$ und $U \cap M = \{f_1 = \cdots = f_{n-k} = 0\}$ mit $\nabla f_1, \cdots, \nabla f_{n-k}$ linear unabhaengig. Dann gilt:

$$N_p M = span\,\{\nabla f_1(p), \cdots, \nabla f_{n-k}(p)\}$$

Insbesondere sind $T_p M$ und $T_p N$ lineare Unterraeume mit $\dim T_p M = k (= \dim M)$ und $\dim N_p M = n - k$.

Definition 4.8: (Differenzierbare Abbildungen zwischen UMfkt.)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$, und $N \subset \mathbb{R}^r$ zwei C^l-UMfkt.. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heisst C^l-differenzierbar in $p \in M$, falls es Karten $\phi : \Omega_M \to W_M \subset M$ um p und $\psi : \Omega_N \to W_N \subset N$ um $f(p)$ gibt, so dass:

$f(W_M) \subset W_N$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : \Omega_M \to \Omega_N$ C^l-differenzierbar in $\phi^{-1}(p)$ ist.

<u>Bemerkung:</u>

1. Die Definition ist unabhaengig von der Wahl der Karten.

2. f ist C^l, wenn f in jedem $p \in M$ C^l ist.

3. Kompostionen von C^l-Abbildungen sind C^l.

Definition 4.9: (Differential)

Das <u>Differential</u> einer C^l-Abbildung $f : M \to N$ in $p \in M$ ist die Abbildung $Df(p) : T_p M \to T_{f(p)} N$ definiert als:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^1} M, \quad \gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M$$

$$Df(p) \cdot v := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \gamma(t) \quad \in T_{f(p)} N$$

Lemma 4.10:

Das Differential $Df(p)$ ist eine lineare Abbildung, die in Karten ϕ um p und ψ um $f(p)$ durch:

$$J_{\psi^{-1} \circ f \circ \phi}(0)$$

gegeben ist. $[\phi(0) = p]$

<u>Bemerkung:</u>

Wenn wir in Lemma 4.10 $f = id_M$ waehlen, erhalten wir die "Physiker-Defintion" (Jaehlich-Vektoranalysis).

Ein Tangetialvektor an $p \in M$ ist eine Zuordnung, die jeder Karte ϕ um $p \in M$ einen Vektor $v \in \mathbb{R}^k$ so zuordnet, dass in einer anderen Karte ψ der vektor $J_{\psi^{-1} \circ \phi}(0) \cdot v$ zugeordnet wird.

4.3 Kurven und Flaechenintegrale

Erinnerung:

$$\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$$
$$L(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

Nun sei γ regulaer. D.h. $\dot{\gamma}(t) = J_\gamma(t) \neq 0 \;\; \forall t$

Dann ist $L(\gamma)$ unabhaengig von der Parametrisierung. $\varphi : [c,d] \xrightarrow{C^1\text{-Diffeo}} [a,b]$

$$L(\gamma \circ \varphi) = \int\limits_c^d \left|\gamma(\varphi(s))'\right| \, ds = \int\limits_c^d \left|\dot{\gamma}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\right| \, ds \underset{\text{Trafo-Formel}}{=} \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt = L(\gamma)$$

Ist γ regulaer und injektiv, so ist $\gamma\big|_{(a,b)} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ eine Karte.

$$f : D \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}, \quad \gamma : [a,b] \to D$$

$$\text{Wegintegral} : \int\limits_\gamma f \; ds := \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt$$

unabhaengig von Parametrsierung.

Definition 4.11:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine 2-dimensionale UMfkt. und $\phi : \Omega \xrightarrow{\simeq} V \subset M$ eine Karte. Und

$$g_{i,j}(t) := < \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(t) \; , \; \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) > \quad i,j = 1,2$$

mit

$$g(t) = \det(g_{i,j}(t)) \quad \text{Gram'sche Determinante}$$

Das Flaechenintegral von $M = \phi(\Omega)$ ist:

$$vol_2(M) := \int\limits_\Omega \sqrt{g(t)} \; dt_1 dt_2$$

Propositon 4.12:

$vol_2(M)$ ist unabhaengig von der Karte.

Dimension k:

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimensionale UMfkt., $\phi : \Omega \xrightarrow{\simeq} M$ eine Karte.

$$g_{i,j}(\overbrace{t_1, ..., t_k}^{t}) :=< \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(t) \ , \ \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) > \quad i, j = 1, ..., k$$

$$g(t) := \det(g_{i,j}(t)), \quad dS(x) := \sqrt{g(t)}\, \overbrace{dt_1, ..., dt_k}^{dt}, \qquad x = \phi(t)$$

k-dimensionales Volumenelement (unabaengig von Karte).

Der allgemeine Fall:

1. $M = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}, \ \ V_j \subset M$ offen in M, $\quad \phi_j : \Omega_j \xrightarrow{\simeq} V_j$ Karte.
2. $\lambda_j : M \xrightarrow{\simeq} [0, 1]$ mit $\lambda_j\big|_{M/V_j} = 0$
3. Fuer jedes $x \in M$ gibt es nur endlich viele $j \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_j(x) \neq 0$.

   Es gilt: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j(x) = 1 \quad \forall x \in M$

   $dS(x) := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\phi_j(t)) \cdot \sqrt{g_j(t)}\, dt_1...dt_k, \quad x = \phi_j(t)$

Proposition 4.13:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine C^l-Untermanigfaltigkeit und $(W_i)_{i \in I}$ eine beliebige offenen Ueberdeckung von M. Dann existiert eine (lokal endliche, der Uerberdeckung $(W_i)_{i \in I}$ untergeordnete) Partition der Eins auf M, d.h:

1. $\exists$ abzaehlbare Familie $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Mengen auf M mit:

   (a) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n = M$

   (b) $\overline{V}_n$ ist kompakt und liegt in M

   (c) $\forall n \ \exists i(n) \in I$ sodass $V_n \subset W_{i(n)}$

   (d) $\forall x \in M \ \ \exists \underset{\text{offen}}{U_x} \subset M \quad \text{sodass} \quad \#\{\ n \in \mathbb{N} \ \mid \ U_x \cap V_n \neq \emptyset\ \} < \infty$

2. $\exists \lambda_n : M \xrightarrow{C^l} [0, 1]$ sodass:

(a) $\lambda_n\big|_{M\setminus V_n} = 0$

(b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1$ als Funktionen von M.

Lemma 4.14:

$M \subset \mathbb{R}^k \quad C^l$-UMfkt. der Dimension m. Dann gibt es eine abzaehlbare offene Ueberdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M, sodass:

1. $\forall n \;\; \exists \phi_n : \mathbb{R}^m \supset \Omega_n \xrightarrow{\simeq} V_n \underset{\text{offen}}{\subset} M$

2. $\overline{V}_n$ ist kompakt und enthalten in M.

Korollar 4.15:

$M \subset \mathbb{R}^k$ UMfkt.. Dann existieren offenen Mengen $O_i \subset M$ mit $\overline{O}_i \subset O_{i+1}$ und $\overline{O_i}$ kompakt.Sowie $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} O_i = M$

5 Differentialformen

5.1 1-Formen (Pfaff'scher Formen) und Kuvenintegrale

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$

$\rightsquigarrow$ n-dimensionale UMfkt. im $\mathbb{R}^n$ (z.B. $id : U \to U$ Karte)

Es gilt eine kanonische Identifikation:

$$T_pU \simeq \mathbb{R}^n$$

Definition 5.1: (Tangential- und Kotangetialbuendel.)

1. Der <u>Kotangentialraum</u> von U bei p ist:

$$T_p^* = (T_p)^* = \{\, l : T_pU \to \mathbb{R} \mid l \;\text{ linear}\}$$

2. Das <u>Tangentialbuendel</u> von U ist

$$TU = \{\, (p,v) \in U \times \mathbb{R}^n \;\mid\; v \in T_pU \,\} = \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_pU$$

Die Abbildung $\pi : TU \to U,\ \ \pi((p,v)) = p$ heisst kanonische Projektion.

3. Das Kotangetialbuendel von U ist

$$T^*U = \{\ (p,l) \in U \times (\mathbb{R}^n)^* \ \mid\ l \in T_p^*U\ \} = \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_p^*U$$

mit Projetkion $\pi : T^*U \to U,\ \ \pi((p,l)) = p.$

Defintion 5.2: (1-Formen und Vektorfelder)

1. Eine (Differential-) 1-Form (bzw. Pfaff'sche Form) auf U ist eine glatte Abbildung:

$$\omega : U \to T^*U \quad \text{mit} \quad \pi \circ \omega = id_U$$

2. Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung

$$X : U \to TU \quad \text{mit} \quad \pi \circ X = id_U$$

Bemerkung:

1. Abbildungen mit $\pi \circ \omega = id$ bzw. $\pi \circ X = id$ heissen auch Schnitte von Kotangetialbuendeln bzw. Tangentialbuendeln.

   Wir schreiben: $\omega(p) \longleftrightarrow \omega_p$ Analog "$X(p) \in T_pU$"

2. ω, X sind glatt bezueglich Auswertung:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad U \ni p \mapsto \omega_p(v) \in \mathbb{R} \quad \text{glatt}$$

Defintion 5.3: (Kurvenintegral)

Sei ω eine stetige 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a,b] \to U$ sei stueckweise C^1: Das Kurvenintergral von ω laengs γ ist:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \underbrace{\omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))}_{:[a,b]\to\mathbb{R}}\ dt \ \left[= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\ dt \right]$$

Bemerkung:

$\int_\gamma \omega$ ist unabhaengig von der Parmetrisierung von γ.

Definition 5.4: (exakte 1-Formen)

Eine 1-Form ω auf $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst exakt, falls es eine C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\omega = df$ gibt. f heisst Stammfunktion Wurzel oder Primitive.

Kotangetialbasis:

Jede 1-Form laesst sich zerlegen in die Form:

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} g_i(p)\, dx_i$$

mit $g : U \to \mathbb{R}$ und $dx_i : T_pU \simeq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es ist ausserdem $\omega \in C^1$ wenn die $g_i \in C^1(U)$

Defintion 5.2: (Gebiet)

Ein Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine zusammenhaengende Menge. In einem Gebiet koennen je zwei Punkte durch einen stueckweise C^1-Weg verbunden werden.

Proposition 5.6:

Eine stetige 1-Form ω auf einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann exakt, wenn fuer je zwei stueckweise C^1-Wege γ, σ in $\mathcal{G}$ mit den selben Anfangs- und Endpunkten gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\sigma \omega$$

Dann ist die Stammfunktion f von ω eindeutig bis auf eine Konstante:

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Definition 5.7: (d-Operator)

1. Es sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i$ eine C^1-1-Form auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir:

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i$$

Wobei $\wedge$ als "Dach" oder "wedge" bezeichnet wird und folgende Bedingung erfuellt: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

2. ω heisst geschlossen, falls $d\omega$=0 gilt.

Bemerkung:

$$d\omega = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i$$

denn: $dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i \quad \Rightarrow \quad dx_i \wedge dx_i = 0$

$$d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, ..., n$$

Definition 5.8: (sternfoermig)

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst sternfoermig bzgl. $x_0 \in X$ falls gilt:

$$\forall x \in X \quad [x_0, x] := \{ \; t \cdot x + (1-t) \cdot x_0 \; \mid \; t \in [0,1] \; \} \subset X$$

Proposition 5.9:

Sei ω eine C^1-1-Form auf einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$:

1. Ist ω exakt, so auch geschlossen.

2. Ist $\mathcal{G}$ sternfoermig und ω geschlossen, so ist ω exakt.

Bemerkung:

1. In Formeln: $\omega = df \quad \Rightarrow \quad d\omega = d(df) = 0$

2. Ist $\mathcal{G}$ sternfoermig: $\quad d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists f : \quad \omega = df$

5.2 Differentialformen hoeherer Ordnungen:

Defintion 5.10: (l-Formen und Dachprodukt von Linearformen)

1. Eine k-Form ω auf V [V n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum] ist eine multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times ... \times V}_{k-mal} \to \mathbb{R}, \quad k \geq 1$$

D.h. fuer $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in V$

(a) $\omega(\ldots, \lambda\, v + \mu\, w, \ldots) = \lambda\, \omega(\ldots, v, \ldots) + \mu\, \omega(\ldots, w, \ldots)$

(b) (alternierend) $\omega(\ldots, \underset{\text{i-te Pos.}}{v}, \ldots, \underset{\text{j-te Pos.}}{w}, \ldots) = -\omega(\ldots, \underset{\text{i-te Pos.}}{w}, \ldots, \underset{\text{j-te Pos.}}{v}, \ldots)$

2. Der Raum der k-Formen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit, $\Lambda^k V^*$ bezeichnen.

   k=0 : $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$, k=1 : $\Lambda^1 V^* = V^*$ =Dualraum von V.

3. Das <u>aeussere Produkt</u> oder auch <u>Dachprodukt</u> von <u>Linearformen</u> (1-Formen) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$, ist definiert durch:

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det\left(\alpha_i(v_j)\right)_{i,j=1,\ldots,k} = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \ldots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \ldots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in V$$

Propostiton 5.11:

Es sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$ eine Basis. Dann bilden

$$\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_k} \in \Lambda^k V^* \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Insbesonder gilt:

$$\dim\left(\Lambda^k V^*\right) = \binom{n}{k}$$

Fuer $k > n$: $\Lambda^k V^* = \{0\}$.

<u>Bemerkung:</u>

1. Aus $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ folgt $\Lambda^k V^* \simeq \Lambda^{n-k} V^*$

2. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ mit $\alpha_i = \alpha_j \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = 0$

Defintion 5.12: (Dachprodukt von Formen)

Das Dachprodukt ist eine Abbildung:

$$\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+1} V^*$$

$$(\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

defniert durch:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1,\ldots,i_k} \; \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$$

und

$$\sigma = \sum_{j_1 < \ldots < j_l} \mu_{j_1,\ldots,j_l} \; \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_l}$$

fuer eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1 < \ldots < j_l}} \lambda_{i_1,\ldots,i_k} \; \mu_{j_1,\ldots,j_l} \; \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_l}$$

Bemerkung:

1. Die Def. ist unabhaengig von der Wahl der Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$

2. Die RHS von $\omega \wedge \sigma$ ist nicht aufsteigend in den Indices

Lemma 5.13: (Rechenregeln)

1. $\lambda \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}, \quad \sigma \in \Lambda^l V^* : \quad \lambda \wedge \sigma = \lambda \cdot \sigma$

2. Linearitaet: $\lambda_i \in \mathbb{R}, \; \omega_i \in \Lambda^k V^*, \; \sigma \in \Lambda^l V^*, \quad i = 1, 2$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_1 \, \omega_1 + \lambda_2 \, \omega_2) \wedge \sigma = \lambda_1 \, \omega_1 \wedge \sigma + \lambda_2 \, \omega_2 \wedge \sigma$$

3. $\omega_1, \ldots, \omega_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in V^*$:

$$\Rightarrow \quad (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r) \wedge (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_s) = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r \wedge \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_s$$

4. Assoziativitaet: $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_3 \wedge \omega_3) \qquad \forall \omega_i \in \Lambda^{k_i} V^* \quad i = 1, 2, 3$

5. Alternierenden Gesetz: $\omega \wedge \sigma = (-1)^{k \cdot l} \sigma \wedge \omega \qquad \omega \in \Lambda^k V^*, \quad \sigma \in \Lambda^l V^*$

Defintion 5.14: (Differential k-Formen auf offenen Mengen)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

1. $$\Lambda^k T^* U := \bigcup_{p \in U} \{p\} \times \Lambda^k T_p^* U$$

   mit $\pi : \Lambda^k T^* U \to U$ Projektion.

2. Eine (Differential)-<u>k-Form</u> ω ist eine Abbildung $\omega : U \to \Lambda^k T^* U$ mit $\pi \circ \omega = id_U$.

   d.h. $\omega(p) = (p, \omega_p)$ mit $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* U$

<u>Bemerkung:</u>

1. 0-Formen sind Funktionen auf U.

2. Kanonische Identifikation $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$, $T_p^* U \simeq (\mathbb{R}^n)^*$

   $\Rightarrow \quad \Lambda^k T_p^* U \simeq \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^*$

3. Damit (und mit Prop. 5.10) kann jede k-Form auf U als:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

   geschrieben werden, wobei $f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Funktionen sind. ω ist C^r, $r = 0, \ldots, \infty \Leftrightarrow$ Alle $f_{i_1 \ldots i_k}$ sind C^r.

4. Das Dachprodukt und seine Rechenregeln (L 5.13) uebertraegt sich:

$$(\omega \wedge \sigma)_p := \omega_p \wedge \sigma_p \quad , \qquad \forall p \in U$$

Notation:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Fuer $k \geq 0$ bezeichnet $\Omega^k(U)$ den Vektorraum der C^∞-k-Formen auf U.

$\rightsquigarrow \quad \Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$

Definition 5.15: (Aeussere Ableitung)

Es sei ω eine C^1-k-Form auf U, $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Dann ist die (k+1)-Form:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_l} \, dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

die <u>aeussere Ableitung</u> von ω.

Notation:

1. Statt $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ schreiben wir: $\sum\limits_{|I|=k} f_I\, dx_I \quad I = (i_1, \ldots, i_k), \quad |I| = k$

2. $\omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$

$$\Rightarrow \quad d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} df_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I$$

Lemma 5.16: (Rechenregeln)

1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega_1, \omega_2$ k-Formen : $\quad d(\lambda_1\, \omega_1 + \lambda_2\, \omega_2) = \lambda_1\, d\omega_1 + \lambda_2\, d\omega_2$

2. $\omega \in \Omega^k(U), \quad \sigma \in \Omega^l(U): \quad d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k\, \omega \wedge d\sigma$ (Leibnitz Regel)

3. Fuer alle C^2-k-Formen ω : $\quad d(d\omega) = 0$

Proposition 5.17: (Poincare-Lemma)

Es sei ω eine C^1-k-Form auf dem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

1. Ist ω exkat, so auch geschlossen.

2. Ist $\mathcal{G}$ sternfoermig und ω geschlossen, so ist ω exakt.

Definition 5.18: (Pullback)

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^l$ offen und $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : V \xrightarrow{C^1} U$. Fuer eine k-Form $\omega = \sum\limits_{|I|=k} f_I\, dx_I$ auf U ist die <u>mittels ϕ zurueckgezogene k-Form</u>:

$$\phi^*\omega = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \phi)\, d\phi_I$$

wie folgt definiert. Zu $I = (i_1, \ldots, i_k)$ setze:

$$d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_k} \quad \text{mit} \quad d\phi_r = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \phi_r}{\partial y_j}\, dy_j\ , \quad r = 1, \ldots, n$$

<u>Bermerkung:</u>

1. Es gilt: $\quad id^*\omega = \omega, \quad \psi : W \xrightarrow{C^1} V, \;\; \phi : V \xrightarrow{C^1} U,$

   $\Rightarrow \quad \psi^*\phi^*\omega = (\phi \circ \psi)^*\omega$

2. Geometrische Interpretation:

$$(\phi^*\omega)_p(\underbrace{v_1,\dots,v_k}_{\in T_pV)}) = \omega_{\phi(p)}\big(\underbrace{D\phi(p)\cdot v_1,\dots,D\phi(p)\cdot v_k}_{T_{\phi(p)}U}\big)$$

3. $\omega = f$ (0-Form) $\Rightarrow \quad \phi^* f = f\circ\phi$

Lemma 5.19: (Rechenregeln)

1. $\forall\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R},\quad \omega_1,\ \omega_2\in\Omega^k(U)$: $\quad \phi^*\big(\lambda_1\,\omega_1+\lambda_2\,\omega_2\big)=\lambda_1\,\phi^*\omega_1+\lambda_2\,\phi^*\omega_2$

2. $\phi^*(\omega\wedge\sigma)=(\phi^*\omega)\wedge(\phi^*\sigma)$

3. $\phi\in C^2,\quad \omega\in C^1:\quad d(\phi^*\omega)=\phi^*d\omega$

Proposition 5.20: (Transformationsverhalten von n-Formen auf $\mathbb{R}^n$)

Es seien $U,V\subset\mathbb{R}^n$ offen und $\phi\in C^1(U,V)$.

Fuer eine n-Form ω auf U, $\quad \omega := f\ dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, gilt:

$$\phi^*\omega=(f\circ\phi)\ \det(J_\phi)\ dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n$$

6 Integralsaetze

6.1 Integration von Formen

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, schreibe $(t_1, \ldots, t_k) \in \Omega$. Wir erhalten dann $dt_1, \ldots, dt_k$. $T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^K$, $T_p^*\Omega \simeq \left(\mathbb{R}^k\right)^*$.

Die Standardbasis $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{R}^k$ induzieren ein Vektorfeld $\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_k}$ auf Ω:

$$\text{d.h.} \quad \partial_{t_i}(p) = e_i \in T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^k$$

Dann gilt: $dt_i(\partial_{t_j}) = \delta_{ij}$

Definition 6.1: (Integration ueber offenen Mengen)

1. Es sei $\omega := f(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$ eine stetige k-Form auf Ω und $\lambda(\Omega) < \infty$. Das <u>Integral von ω uber Ω</u> ist :

$$\int_\Omega \omega = \int_\Omega \omega_t\big(\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_k}\big)\, dt_1 \ldots dt_k = \int_\Omega f(t)\, dt_1 \ldots dt_k$$

2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermanigfaltigkeit, die von einer Karte $\phi : \Omega \xrightarrow{\simeq} M$ ueberdeckt wird.

   Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $M \subset U$ und ω stetige k-Form auf U. Dann ist das <u>Integral von Ω ueber M</u> definiert durch:

$$\int_M \omega = \int_\Omega \phi^*\omega = \int_\Omega \omega_{\phi(t)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial t_k}(t)\right) dt_1 \ldots dt_k$$

6.2 Orientierebarkeit und Untermanigfaltigkeiten mit Rand

Definition 6.2: (Orientierbarkeit)

Eine Untermanigfaltigkeit M heisst <u>orientierbar</u>, falls Karten $\phi_i : \Omega_i \xrightarrow{\simeq} W_i \subset M$, $i \in I$ existieren mit folgenden Eigenschaften:

1. M wird ueberdeckt, d.h. $\bigcup_{i \in I} W_i = M$

2. $\forall i, j \in I: \quad \phi_i^{-1} \circ \phi_j\big|_{\phi_j^{-1}(W_i \cap W_j)}$ hat positve Jacobi-Determinante. D.h.

$$\det J_{\phi_i^{-1} \circ \phi_j}(t) > 0 \quad \forall t \in \phi_j^{-1}(W_i \cap W_j), \quad \forall i, j \in I$$

Bemerkung:

Eine Orientierung von M entspricht einer "stetigen Wahl" von Orientierungen aller $T_pM, \quad p \in M$

Definition 6.3: (Untermanigfaltigkeit mit Rand)

$M \subset \mathbb{R}^n$ heisst k-dimensionale Untermanigfaltigkeit mit Rand, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $W \subset M$, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine C^l-Immersion, $l \geq 1, \quad \phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gibt, die $\Omega \cap \mathbb{R}^k_-$ homoeomorph auf W abbildet.

Dann ist

$$\mathbb{R}^k_- := \{ \ (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \leq 0 \ \}$$

und

$$\partial\mathbb{R}^k_- := \{ \ (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_1 = 0 \ \}$$

Die Punkte in $\phi(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^k_-)$ heissen Randpunkte von M. Punkte in $\phi(\Omega \cap \mathring{\mathbb{R}}^k_-)$ heissen innere Punkte. Die Menge der Randpunkte werden mit ∂M bezeichnet und heisst Rand von M.

Bemerkung:

1. Randpunkte sind wohldefiniert, denn ϕ Diffeomorphismus. Es bildet also ϕ Punkte mit $t_1 < 0$ auf $t_1 < 0$ (also genau $t = 0$ auf $t = 0$) ab.

2. ∂M ist eine $(k-1)$-dimensionale Untermanigfaltigkeiten, denn $\phi\big|_{\Omega \cap \partial\mathbb{R}^k_-}$ bilden Karten von ∂M. $\quad \partial\partial M = \emptyset$

3. Das Konzept von Orientierbarkeit uebertraegt sich ohne Aenderung auf Untermanigfaltigkeiten mit Rand.

4. Konvention. M zusammenhaengend und kompakte 1-dimensionale-Untermanigfaltigkeit. Dann existiert ein Diffeomorphismus:

   (a) $\phi : M \to S^1$ oder:

   (b) $\phi : M \to [a, b] \quad a < b$

Dann ist M orientierbar und ∂M wird wie $\partial[a,b]$ orientiert:

$$T_b\partial[a,b] \text{ ist pos. orientiert.}$$

$$T_a\partial[a,b] \text{ ist neg. orientiert}$$

5. Der Rand "erbt eine Orientierung". M orientiert $\Rightarrow \quad \partial M$ ist orientiert.

Definition 6.4: (Integration von k-Formen)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierbare, k-dimensionale Untermanigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und ω eine C^0 k-Form auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, $\quad M \subset U$ Wir waehlen Karte $\phi_i : \Omega_i \to W_i \subset M, \quad i \in \mathbb{N}$ (oder endlich) gemaess Definition 6.2. Es sei $\rho_i : M \xrightarrow{C^1} [0,1], \ \ i \in \mathbb{N}$, eine Partititon der Eins mit $\sum\limits_i \rho_i = 1$ und

$$\{\ p \in M \mid \rho_i(p) \neq 0\ \} \subset W_i$$

Dann definieren wir:

$$\int\limits_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_i} \phi_i^*(\rho_i \omega)$$

Bemerkung:

Das Integral haengt nicht von der Wahl der Karten und der Partition der Eins ab.

6.3 Die Integralsaetze von Gauss und Stokes

Theorem 6.5 (Gauss'scher Integralsatz)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Kompakte, n-dimensionaler Untermanigfaltigkeit mit Rand. Wir orientieren M durch die uebliche Orientierung des $\mathbb{R}^n$, d.h. via $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$. ∂M trage die induzierte Orientierung.

Es sei ω eine ,auf einer offenen Umgebung von M definierte, stetig differenzierbare, (n-1)-Form. Dann gilt:

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega$$

Anwendung:

1. Geen-Riemann-Formel:

   $M \subset \mathbb{R}^3$ kompakte 2-dimensionale Untermanigfaltigkeit und $P, Q \ C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ auf einer Umgebung von M.

Dann gilt:

$$\int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \int_{M} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

2. Cauchy-Integralformel:

   M eine kompakte, 2-dimensionale Untermanigfaltigkeit mit Rand sowie $M \subset \underset{\text{offen}}{U} \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar (=holomorph). Dann gilt:

$$\int_{\partial M} f(z)\,dz = 0$$

Theorem 6.6: (Satz von Stokes)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, k-dimensionale, orientierte Untermanigfaltigkeit mit Rand ∂M, der die induzierte Orientierung trage. Es sei ω eine stetig differenzierbare (k-1)-Form auf M. Dann gilt:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{M} d\omega$$

Bemerkung:

ω eine (k-1)-Form auf M $\Leftrightarrow \omega : M \to \Lambda^{k-1}T^*M$. Die Differenzierbarkeit wird mittles der Karten ueberprueft (Ist M von der Klasse C^2, so haengt dies nicht von der Wahl der Karte ab).

Korollar 6.7:

Sei M geschlossen ($\Leftrightarrow$ Kompakt und $\partial M \neq \emptyset$) k-dimensionale, orientierbare Untermanigfaltigkeit und ω eine exakte k-Form. Dann:

$$\int_{M} \omega = 0$$

Lemma 6.8:

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n,\ N \subset \mathbb{R}^l$ kompakte, k-dimensionale UMfkt. und $\Psi : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Es sei N orientiert und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann wird M durch Ψ orientiert und bzgl. dieser Orientierung gilt:

$$\int_{M} \Psi^*\omega = \int_{N} \omega = \int_{\Psi(M)} \omega$$

6.4 Klassische Formulierung der Integralsaetze

Theorem 6.9 (Gaussscher Integralsatz)

Es sei wie in Theorem 6.5 ($M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte n-dimensioale UMfkt. und ∂M durch $\mathbb{R}^n$ orientiert). Es sei $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Umgebung von M und u dass aeussere Normalenfeld von ∂M, d.h.

$$\forall p \in \partial M \quad : \quad \vec{u}(p) \perp T_p\partial M \quad \text{und zeigt nach aussen, sowie:} \quad \|\vec{u}(p)\| = 1$$

Dann gilt:

$$\int\limits_M \operatorname{div} \vec{v}\; d^n x = \int\limits_{\partial M} < \vec{v}, \vec{u} > \, dS(x)$$

Theorem 6.10: (Stokes fuer Flaechen im $\mathbb{R}^3$)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte UMfkt. mit Rand, die die induzierte Orientierung traegt. Es sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld, welches auf einer Umgebung von M definiert und stetig differenzierbar ist.

Bezeichung:

a) $\vec{u} :=$ "aeussere" Normale zu M

b) $\vec{t} :=$ Einheitstangentialvektor entlang ∂M in Richtung der Orientierung

Dann gilt:

$$\int\limits_M < \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{u} > \, dS(x) = \int\limits_{\partial M} < \vec{v}, \vec{t} > \, ds(x)$$